Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Seviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005 CLASA A XII-A

Subiectul 1. Se consideră mulţimile finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$ cu proprietăţile

i) $|A_i| \geq 2$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$, şi

ii) $|A_i \cap A_j| \neq 1$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Să se arate că elementele mulţimii $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ pot fi colorate cu două culori, astfel încât nici o mulţime A_i să nu aibă toate elementele colorate la fel.

(*Prin* $|X|$ *se notează cardinalul mulţimii* X)

Subiectul 2. Se consideră funcţia continuă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ şi şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x = 0.$$

Arătaţi că:

a) Şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt convergente.

b) Există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax + b$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

Subiectul 3. Fie G un grup şi F mulţimea elementelor de ordin finit din G. Dacă F este finită, să se arate că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n y = y x^n$ oricare ar fi $x \in G$ şi $y \in F$.

Subiectul 4. Fie A un inel finit cu $n \geq 3$ elemente, în care există exact $\dfrac{n+1}{2}$ *pătrate*. Să se arate că

a) $1 + 1$ este inversabil.

b) A este corp.

(Elementul $a \in A$ se numeşte *pătrat* dacă $a = b^2$ cu $b \in A$)

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii